TRIGONOMETRIA

Trigonometría, rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, de las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de la superficie de una esfera.

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa. Otras aplicaciones de la trigonometría se pueden encontrar en la física, química y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el sonido o el flujo de corriente alterna.

Trigonometría plana

Figura 1A

Figura 1B

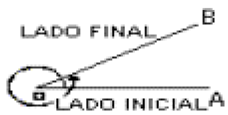


Figura 1C

El concepto trigonométrico de ángulo es fundamental en el estudio de la trigonometría. Un ángulo trigonométrico se genera con un radio que gira. Los radios OA y OB (figuras 1a, 1b y 1c) se consideran inicialmente coincidentes con OA. El radio OB gira hasta su posición final. Un ángulo y su magnitud son positivos si se generan con un radio que gira en el sentido contrario a las agujas del reloj, y negativo si la rotación es en el sentido de las agujas del reloj. Dos ángulos trigonométricos son iguales si sus rotaciones son de igual magnitud y en la misma dirección.

Una unidad de medida angular se suele definir como la longitud del arco de circunferencia, como s en la figura 2, formado cuando los lados del ángulo central (con vértice en el centro del círculo) cortan a la circunferencia.

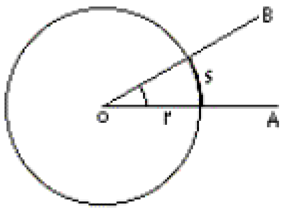


Figura 2

Si el arco s (AB) es igual a un cuarto de la circunferencia total C, es decir, s = 3C, de manera que OA es perpendicular a OB, la unidad angular es el ángulo recto. Si s = 1C, de manera que los tres puntos A, O y B están todos en la misma línea recta, la unidad angular es el ángulo llano. Si s = 1/360 C, la unidad angular es un grado. Si s = YC, de manera que la longitud del arco es igual al radio del círculo, la unidad angular es un radián. Comparando el valor de C en las distintas unidades, se tiene que

1 ángulo llano = 2 ángulos rectos = 180 grados = p radianes

Cada grado se subdivide en 60 partes iguales llamadas minutos, y cada minuto se divide en 60 partes iguales llamadas segundos. Si se quiere mayor exactitud, se utiliza la parte decimal de los segundos. Las medidas en radianes menores que la unidad se expresan con decimales. El símbolo de grado es °, el de minuto es ´ y el de segundos es ". Las medidas en radianes se expresan o con la abreviatura rad o sin ningún símbolo. Por tanto, **61° 28´ 42,14" = 1,073 rad = 1,073**

Se sobreentiende que el último valor es en radianes.

Un ángulo trigonométrico se designa por convenio con la letra griega theta (q). Si el ángulo q está dado en radianes, entonces se puede usar la fórmula s = rq para calcular la longitud del arco s; si q viene dado en grados, entonces:

s = π.r. θ /180

Funciones trigonométricas

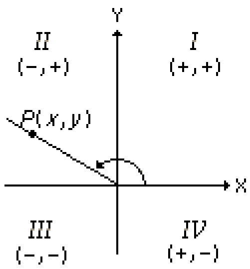


Figura 3

Las funciones trigonométricas son valores sin unidades que dependen de la magnitud de un ángulo. Se dice que un ángulo situado en un plano de coordenadas rectangulares está en su posición normal si su vértice coincide con el origen y su lado inicial coincide con la parte positiva del eje x.

En la figura 3, el punto P está situado en una línea recta que pasa por el origen y que forma un ángulo q con la parte positiva del eje x. Las coordenadas x e y pueden ser positivas o negativas según el cuadrante (I, II, III, IV) en que se encuentre el punto P; x será cero si el punto P está en el eje y o y será cero si P está en el eje x. La distancia r entre el punto y el origen es siempre positiva e igual a $x^2 + y^2$, aplicando el teorema de Pitágoras.

Las seis funciones trigonométricas más utilizadas se definen de la siguiente manera:

seno (sen) del ángulo θ = sen θ = y/r
coseno (cos) del ángulo θ = cos θ = x/r
tangente (tg) del ángulo θ = tg θ = y/x
cotangente (cotg) del ángulo θ = cotg θ = x/y
secante (sec) del ángulo θ = sec θ = r/x
cosecante (cosec) del ángulo θ = cosec θ = r/y

Como la x y la y son iguales si se añaden 2p radianes al ángulo - es decir, si se añaden 360° - es evidente que sen (q + 2p) = sen q. Lo mismo ocurre con las otras cinco funciones. Dadas sus respectivas definiciones, tres funciones son las inversas de las otras tres, es decir,

cotg θ = 1/tg θ ; sec θ = 1/cos θ ; cosec θ = 1/sen θ

Si el punto P, de la definición de función trigonométrica, se encuentra en el eje y, la x es cero; por tanto, puesto que la división por cero no está definida en el conjunto de los números reales, la tangente y la secante de esos ángulos, como 90°, 270° y -270° no están definidas. Si el punto P está en el eje x,la y es 0; en este caso, la cotangente y la cosecante de esos ángulos, como 0°, 180° y -180° tampoco está definida. Todos los ángulos tienen seno y coseno, pues r no puede ser igual a 0.

Como r es siempre mayor o igual que la x o la y, los valores del sen q y cos q varían entre -1 y +1. La tg q y la cotg q son ilimitadas, y pueden tener cualquier valor real. La sec q y la cosec q pueden ser mayor o igual que +1 o menor o igual que -1.

Como se ha podido ver en los anteriores apartados, el valor de las funciones trigonométricas no depende de la longitud de r, pues las proporciones son sólo función del ángulo.

Si q es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo (figura 4), las definiciones de las funciones trigonométricas dadas más arriba se pueden aplicar a q como se explica a continuación. Si el vértice A estuviera situado en la intersección de los ejes x e y de la figura 3, si AC descansara sobre la parte positiva del eje x y si B es el punto P de manera que AB = AP = r, entonces el sen q = y/r = a/c, y así sucesivamente:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

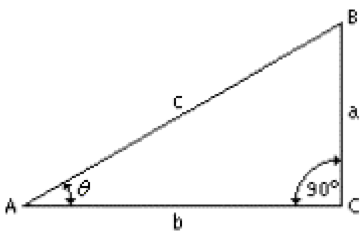


Figura 4

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cotg } \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{sec } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{cosec } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{c}{a}$$

Los valores numéricos de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos se pueden obtener con facilidad. Por ejemplo, en un triángulo rectángulo isósceles, se tiene que q = 45 ° y que b = a, y además se sabe, por el Teorema de Pitágoras, que c2= b2+ a2. De aquí se deduce que c ² = 2.a ² o que c = a ². Por tanto

sen 45° = cos 45° = $1/\sqrt{2}$

tg 45° = cotg 45° = 1

sec 45° = cosec 45° = $\sqrt{2}$

Los valores numéricos de las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera se pueden hallar de forma aproximada dibujando el ángulo en su posición normal utilizando la regla, el compás y el transportador de ángulos. Si se miden x, y y r es fácil calcular las proporciones deseadas. En realidad, basta con calcular los valores del sen q y del cos q para unos cuantos ángulos específicos, pues los valores de los demás ángulos y las demás funciones se calculan utilizando las igualdades que se mencionan en el siguiente apartado.

Igualdades trigonométricas

Las siguientes fórmulas, llamadas igualdades o identidades, muestran las relaciones entre las diversas funciones trigonométricas, que se cumplen para cualquier ángulo q, o pareja de ángulos q y f:

I. $\operatorname{sen}\theta \operatorname{cosec}\theta = \cos\theta \sec\theta = \operatorname{tg}\theta \operatorname{cotg}\theta = 1$

II. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$; $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

III. $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta -$

$\operatorname{cotg}^2\theta = 1$

IV. $\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen}\theta \cos\phi \pm \cos\theta \operatorname{sen}\phi$

$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta \cos\phi \mp \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$

$\operatorname{tg}(\theta \pm \phi) = \dfrac{\operatorname{tg}\theta \pm \operatorname{tg}\phi}{1 \mp \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\phi}$

V. $\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(-\theta)$; $\cos\theta = \cos(-\theta)$

$\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(\theta - 180°) = \cos(\theta - 90°)$

$\cos\theta = -\cos(\theta - 180°) =$

$-\operatorname{sen}(\theta - 90°)$

Utilizando con reiteración una o más fórmulas del grupo V, conocidas como fórmulas de reducción, es posible calcular el seno de q y el coseno de q, para cualquier valor de q, en función del seno y del coseno de ángulos entre 0° y 90°. Utilizando las fórmulas de los grupos I y II, se pueden calcular los valores de la tangente, cotangente, secante y cosecante de q en función del seno y del coseno. Por tanto, es suficiente tabular los valores del seno y el coseno de q para valores de q entre 0° y 90°. En la práctica, para evitar cálculos tediosos, se suelen también tabular las otras cuatro funciones para los mismos valores de q. Sin embargo, desde la popularización de las calculadoras electrónicas y los ordenadores o computadoras, las tablas de funciones trigonométricas han caído en desuso.

La variación de los valores de las funciones trigonométricas para diversos ángulos se pueden representar gráficamente (ver figuras adjuntas). Se puede ver con claridad en estas curvas que todas las funciones trigonométricas son periódicas, es decir, el valor de cada una se repite a intervalos regulares llamados periodos. El periodo de todas las funciones, excepto la tangente y la cotangente, es 360° o 2p radianes. La tangente y la cotangente tienen un periodo de 180 ° o p radianes.

Funciones inversas

La expresión ´y es el seno de q,´ o y = sen q, es equivalente a la expresión q es el ángulo cuyo seno es igual a y, lo que se escribe como q = arcsen y, o también como q = sen-1y. Las otras funciones inversas, arccos y, arctg y, arccotg y, arcsec y, y arccosec y, se definen del mismo modo. En la expresión y = sen q o q = arcsen y, un valor dado de y genera un número infinito de valores de q, puesto que sen 30° = sen 150 ° = sen (30° + 360°)...= 1. Por tanto, si q = arcsen 1, entonces q = 30° + n360° y q = 150° + n360°, para cualquier entero n positivo, negativo o nulo. El valor 30° se toma como valor principal o fundamental del arcsen 1. Para todas las funciones inversas, suele darse su valor principal. Hay distintas costumbres, pero la más común es que el valor principal del arcsen y, arccos y, arctg y, arccosec y, arcsec y y arccotg y, para y positiva es un ángulo entre 0° y 90°. Si y es negativa, se utilizan los siguientes rangos:

-90° ≤ arcsen y; arctg y < 0°

90° < arccos y; arccotg y ≤ 0°

-180° ≤ arcsec y; arccosec ≤ -90°

El triángulo general

Entre las diversas aplicaciones prácticas de la trigonometría está la de determinar distancias que no se pueden medir directamente. Estos problemas se resuelven tomando la distancia buscada como el lado de un triángulo, y midiendo los otros dos lados y los ángulos del triángulo. Una vez conocidos estos valores basta con utilizar las fórmulas que se muestran a continuación.

Si A, B y C son los tres ángulos de un triángulo y a, b, c son los tres lados opuestos respectivamente, es posible demostrar que

Las reglas del coseno y de la tangente tienen otras dos expresiones que se obtienen rotando las letras a, b, c y A, B, C.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \text{ (regla del seno)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A \text{ (regla del coseno)}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\ \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg}\ \frac{1}{2}(A+B)} \text{ (regla de la tangente)}$$

Estas tres relaciones son suficientes para resolver cualquier triángulo, esto es, calcular los ángulos o lados desconocidos de un triángulo, dados: un lado y dos ángulos, dos lados y su correspondiente ángulo, dos ángulos y un ángulo opuesto a uno de ellos (que tiene dos posibles soluciones), o los tres lados.

Otras medidas angulares

En ciertas ramas de las matemáticas avanzadas, en particular aquéllas que incluyen cálculos, los ángulos se miden habitualmente en radianes (rad). En 360° hay 2p rad, o unos 6,28 rad.

En el ejército, los ángulos se miden generalmente en milésimas, especialmente para la localización de objetivos de artillería. Una milésima es la medida del ángulo central formado por un arco que es 1/6.400 del círculo. Una milésima equivale a 0,05625° y, aproximadamente, 0,001 radianes.

Radián, en matemáticas, la unidad de ángulo plano igual al ángulo central formado por un arco de longitud igual al radio del círculo. La medida en radianes de un ángulo se expresa como la razón del arco formado por el ángulo, con su vértice en el centro de un círculo, y el radio de dicho círculo. Esta razón es constante para un ángulo fijo para cualquier círculo. La medida en radianes de un ángulo no es la razón de la longitud de la cuerda y el radio, sino la razón de la longitud del arco y el radio.

La medida en radianes de un ángulo y su medida en grados están relacionadas. La circunferencia de un círculo está dada por

C = 2pr

donde r es el radio del círculo y π es el número 3,14159. Dado que la circunferencia de un círculo es exactamente 2 π radios, y que un arco de longitud r tiene un ángulo central de un radián, se deduce que

2 π radianes = 360 grados

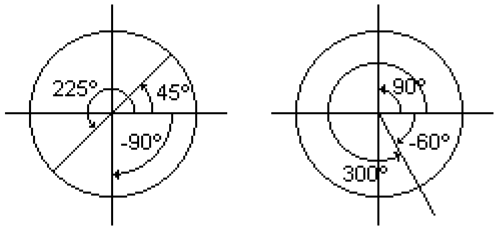
Al dividir 360° por 2 π se puede ver que un radián es aproximadamente 57°17´44,8". En aplicaciones prácticas, las siguientes aproximaciones son lo suficientemente exactas:

un radián = 57,3 grados

un grado = 0,01745 radianes

El grado y el radián son unidades angulares de distinto tamaño y son intercambiables. Los ingenieros y técnicos utilizan más los grados, mientras que la medida en radianes se usa casi exclusivamente en estudios teóricos, como en el cálculo, debido a la mayor simplicidad de ciertos resultados, en especial para las derivadas y la expansión en series infinitas de las funciones trigonométricas. Como se puede ver, mientras que el símbolo ° se utiliza para indicar grados, no se utiliza ningún símbolo para indicar la medida en radianes.

Trigonometría
Grados y radianes



Las unidades de medida de ángulos más conocidas son los grados, minutos y segundos. Este tipo de medidas está basado en la división en partes iguales de una circunferencia.

Las equivalencias son las siguientes:

360° = un giro completo alrededor de una circunferencia

180° = 1/2 vuelta alrededor de una circunferencia

90° = 1/4 de vuelta

1° = 1/360 de vuelta, etc.

También se puede definir otra unidad angular, el radian, que en las aplicaciones físicas es mucho mas practico y directo que trabajar con grados.

La magnitud de un ángulo medido en radianes está dada por la longitud del arco de circunferencia que subtiende, dividido por el valor del radio. El valor de este ángulo es independiente del valor del radio; por ejemplo, al dividir una pizza en 10 partes iguales, el ángulo de cada pedazo permanece igual, independiente si la pizza es chica, normal o familiar.

De esta forma, se puede calcular fácilmente la longitud de un arco de circunferencia; solo basta multiplicar el radio por el ángulo en radianes.

Long. arco de circunferencia = [Angulo en radianes] x [Radio de la circunferencia]

Ya que conocemos el perímetro de una circunferencia de radio unitario ($2\pi * r = 2$< Imagen >), entonces el ángulo de una circunferencia completa, medido en radianes es 2pi. Como además sabemos que este mismo ángulo, medido en grados mide 360°, entonces podemos definir una equivalencia:

1 radian = 57,29°

a partir de esta igualdad, determinamos que:

90° = $\pi/2$ radianes

$60° = \pi/3$ radianes

$45° = \pi/4$ radianes

$30° = \pi/6$ radianes